Казанский государственный университет

На правах рукописи

Ахмед Махер Абдель Басет

Метод задачи о скачке в задачах сопряжения решений уравнений с частными производными

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат Ахмед Махер

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань – 2001

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Казанского государственного университета.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор Н.Б.Плещинский

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук, профессор Ф.Г.Мухлисов,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К.Липачев.

Ведущая организация

Чувашский государственный университет.

Защита состоится 26 . 10 2001 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета КР 212.081.07 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Кремлевская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 24 . 09 2001 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Е.М.Карчевский

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена задачам линейного сопряжения для дифференциальных уравнений 2-го порядка с частными производными на плоскости. В общем случае задача линейного сопряжения состоит в следующем. Пусть L – общий участок границ областей D_1, D_2 и L_1, L_2 – оставшиеся части их границ. Нужно найти в D_1 и D_2 решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ линейных дифференциальных уравнений с частными производными, удовлетворяющие на L условиям сопряжения вида

$$a_1(t)\, u_1(t) + a_2(t)\, u_2(t) = c_2(t), \quad b_1(t)\, \frac{\partial u_1}{\partial n}(t) + a_2(t)\, \frac{\partial u_2}{\partial n}(t) = c_2(t), \qquad (1)$$

где $\partial/\partial n$ – производная по нормали к L, и некоторым граничным условиям на L_1 и L_2. Частным случаем задачи сопряжения является задача о скачке с условиями

$$u_1(t) - u_2(t) = a(t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial n}(t) - \frac{\partial u_2}{\partial n}(t) = b(t), \quad t \in L. \qquad (2)$$

В диссертации исследованы два класса задач линейного сопряжения для уравнений с частными производными: задачи сопряжения решений уравнения Гельмгольца и задачи сопряжения для модельных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа.

Актуальность темы. Многие задачи математической физики являются задачами линейного сопряжения для уравнений с частными производными. К таким задачам относятся, например, задачи теории упругости о взаимодействии упругих тел, задачи распространения волн в неоднородных средах, задачи дифракции волн на препятствиях различной природы. В этих задачах на границе раздела сред обычно сопрягаются решения уравнений или систем уравнений с частными производными одного и того же типа. В работах, посвященных граничным задачам для уравнений и систем уравнений смешанного и смешанно-составного типа, исследованы задачи сопряжения на общем участке границы решений уравнений с частными производными различных типов. Термин "задача линейного сопряжения" часто используется в литературе в теории граничных задач для аналитических функций [1],

Особый интерес представляют задачи сопряжения с разрывными коэффициентами в условии сопряжения (1). Такие условия появляются в задачах дифракции электромагнитных волн на металлических экранах [2], [3] и в задачах теории упругости для тел с дефектами различной природы (разрезами или тонкими включениями) [4], [5].

Цель работы. Основная цель диссертации – исследовать возможность применения метода задачи о скачке при решении задач линейного сопряжения для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами в условиях сопряжения (1).

Основная идея метода задачи о скачке сводится к следующему [6]. Пусть на некоторой части M линии L заданы значения искомых решений или их производных, а на оставшейся части N этой линии решения и их производные должны быть непрерывны. Предположим, что получено

---

[1]Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

[2]Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964. – 428 с.

[3]Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

[4]Партон Б.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 312 с.

[5]Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

[6]Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. The Cauchy problem and potentials for elliptic partial differential equations and some of their applications // Advances in Equations and Inequalities (ed. J.M.Rassias). – Hadronic Press, 1999. – P.127–146.

в явном виде решение задачи о скачке. Тогда из условий на линии M следуют уравнения (как правило, интегральные) для определения функций $a(t), b(t)$.

Методы исследования. При решении задачи о скачке используется метод частичных областей. Вспомогательные переопределенные задачи Коши для уравнения Гельмгольца решены методом интегрального преобразования Фурье в классе распределений медленного роста и методом разложения в ряды Фурье в случае осесимметричной среды. Решения задач о скачке для уравнений смешанного типа получены двумя способами: методом интегральных уравнений и методом преобразования Фурье.

Сингулярные интегральные уравнения с логарифмическими и степенными особенностями в ядре решены методом интегральных тождеств и методом аналитического продолжения [7].

Научная новизна. Предложен новый метод решения задач сопряжения для уравнения Гельмгольца и для модельных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Исследован новый класс задач с дефектами на линии изменения типа для уравнений смешанного типа.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации в основном носят теоретический характер, они могут быть использованы при решении ряда других задач математической физики и при исследовании некоторых практических задач электродинамики и газовой динамики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Международной конференции "Mathematical Methods in Electro-

[7] Плещинский Н.Б. Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 160 с.

magnetic Theory. MMET 2000" (Харьков. Украина, 12-15 сент. 2000 г.), на Молодежной научной школе-конференции "Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах" (Казань, Юдино, 19-22 окт. 2000 г.), на Итоговой научной конференции Казанского государственного университета за 2000 г. и на научном семинаре "Математическое моделирование и математическая физика" (рук. проф. Н.Б.Плещинский).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [4]. Результаты совместных работ принадлежат соавторам в равных долях.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав, общий объем - 95 страниц. В списке литературы 55 наименований.

Краткое содержание диссертации

В главе 1 приведены основные определения и утверждения, которые используются в дальнейшем при решении задач сопряжения для уравнений с частными производными.

В §1 содержатся необходимые сведения из теории распределений (обобщенных функций) и перечислены основные свойства интегрального преобразования Фурье в пространствах распределений медленного роста. Особое внимание уделено тому факту, что образы Фурье односторонних распределений являются предельными значениями на вещественной оси аналитических в верхней или нижней полуплоскостях функций.

В §2 методом преобразования Фурье исследована задача Коши в полупространстве для дифференциального уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами. Эта задача является модельной в общей теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Подробно рассмотрены случаи, когда задача Коши является переопределенной (например, для эллиптических уравнений). Найдены условия на граничные функции, при которых задача Коши имеет решение, и это решение выражено через граничные функции. Показано, как использовать условия на граничные функции в задачах Коши для верхнего и нижнего полупространств при исследовании задачи о скачке на гиперплоскости - простейшей задачи линейного сопряжения решений двух уравнений с частными производными.

В §3 рассмотрены некоторые классы сингулярных интегральных уравнений, решения которых могут быть найдены в замкнутой форме: характеристическое уравнение с ядром Коши, интегральные уравнения с логарифмическими и степенными особенностями в ядре и сингулярные интегральные уравнения с автоморфными ядрами. К уравнениям такого типа приводятся задачи дифракции электромагнитных волн на металлических экранах (гл. 2) и задачи сопряжения решений уравнений смешанного типа (гл. 3).

В главе 2 исследована задача о скачке для двумерного уравнения Гельмгольца в плоскопараллельной слоистой среде, когда скачки искомого решения задаются на прямых, разделяющих соседние слои, и в осесимметричной слоистой среде, когда скачки задаются на концентрических окружностях. Методом задачи о скачке получены интегральные уравнения с логарифмической особенностью в ядре, эквивалентные задачам дифракции электромагнитной волны на системе металлических лент.

К задачам сопряжения для уравнения Гельмгольца с постоянными коэффициентами в условиях сопряжения (в том числе, к задаче о скачке) приводятся скалярные задачи о падении электромагнитной волны на границу раздела сред. Скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на металлических экранах, расположенных на границе раздела сред также сводятся к задачам линейного сопряжения для уравнения Гельмгольца, но уже с разрывными (кусочно-постоянными) коэффициентами в условиях сопряжения.

В §4 рассмотрены вспомогательные задачи Коши для уравнения Гельмгольца в полуплоскости и в полосе. Методом интегрального преобразования Фурье в классах распределений медленного роста получены уравнения для образов Фурье искомых решений. Найдены соотношения, которым должны удовлетворять граничные функции в переопределенных задачах Коши. В случае полуплоскостей решения уравнения Гельмгольца рассматриваются в классе решений, уходящих на бесконечность. Условия излучения сформулированы на языке образов Фурье граничных функций.

Доказано, что (теорема 4.3) распределение $u_j(x,z)$ является решением уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k_j^2 u(x,z)=0$$

в области $D_j=\{h_j<z<h_{j+1}$ и удовлетворяет граничным условиям

$$u_j(x,h_j+0)=u_j^+(x),\qquad \frac{\partial u_j}{\partial z}(x,h_j+0)=v_j^+(x),$$

$$u_j(x,h_{j+1}-0)=u_{j+1}^-(x),\quad \frac{\partial u_j}{\partial z}(x,h_{j+1}-0)=v_{j+1}^-(x)$$

тогда и только тогда, когда образы Фурье граничных функций удовлетворяют равенствам

$$[V_j^+(\xi)-i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)]-e^{i(h_{j+1}-h_j)\gamma_j^0(\xi)}\,[V_{j+1}^-(\xi)-i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)]=0, \tag{3}$$

$$e^{i(h_{j+1}-h_j)\gamma_j^0(\xi)}\,[V_j^+(\xi)+i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)]-[V_{j+1}^-(\xi)+i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)]=0. \tag{4}$$

При этом образ Фурье искомого решения $U_j(\xi,\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(k_j^2-\xi^2-\zeta^2)\,U_j(\xi,\zeta)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_j\zeta}\,[V_j^+(\xi)-i\zeta U_j^+(\xi)]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_{j+1}\zeta}\,[V_{j+1}^-(\xi)-i\zeta U_{j+1}^-(\xi)].$$

Здесь

$$\gamma_j^0(\xi) = \left\{ |\xi| > k_j \ : \ i\sqrt{\xi^2 - k_j^2}; \quad |\xi| < k_j : -\sqrt{k_j^2 - \xi^2} \right\}.$$

В §5 исследована задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскопараллельной слоистой среде. С помощью найденных в §3 соотношений для граничных функций в частичных областях установлено, что задача о скачке равносильна системе линейных алгебраических уравнений для образов Фурье вспомогательных граничных функций, составленной из условий сопряжения и равенств вида (3), (4) (теорема 5.1). В частном случае, когда прямая $z = h$ разделяет две полуплоскости, эта система уравнений имеет вид

$$V_1^+(\xi) - i\,\gamma_1^0(\xi)\,U_1^+(\xi) = 0, \quad V_1^-(\xi) + i\,\gamma_0^0(\xi)\,U_1^-(\xi) = 0,$$

$$U_1^+(\xi) - U_1^-(\xi) = A(\xi), \qquad V_1^+(\xi) - V_1^-(\xi) = B(\xi).$$

Показано, что полную систему уравнений для образов Фурье граничных функций всегда можно упростить и привести к системе всего из двух уравнений.

В §6 с помощью интегрального представления решения задачи о скачке для уравнения Гельмгольца сведена к интегральному уравнению с логарифмической особенностью в ядре задача дифракции электромагнитной волны на системе металлических лент в плоскослоистой среде (теорема 6.1). В частном случае, когда на плоской границе раздела двух сред $z = h$ расположена одна металлическая лента $\alpha < x < \beta$, это интегральное уравнение имеет вид

$$\int\limits_\alpha^\beta \varphi^M(t)\,\Big[\frac{-i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)}\, e^{i(t-x)\xi}\,d\xi\Big]\,dt =$$

$$= -\tilde{u}(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1^0(\xi) - \gamma_0^0(\xi)}{\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)}\,\hat{U}(\xi)\,\varepsilon^{-i\xi x}\,d\xi, \ \ x \in (\alpha, \beta),$$

здесь $\tilde{u}(x)$ – граничное значение потенциальной функции внешнего поля.

В §7 рассмотрена задача о скачке для уравнения Гельмгольца в осесимметричной слоистой среде. В этом случае, в силу периодичности искомого решения по азимутальной координате, удобно использовать разложения функций в ряды Фурье. Поэтому зависимости между граничными функциями в переопределенных задачах сформулированы на языке их коэффициентов Фурье (теорема 7.1). Аналогичные результаты получены с помощью интегрального преобразования Ханкеля.

В главе 3 метод задачи о скачке использован при решении ряда граничных задач для уравнения смешанного типа первого рода [8]

$$\operatorname{sgn} y\,|y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad m \geq 0. \tag{5}$$

Это уравнение принято считать модельным среди уравнений смешанного типа первого рода, то есть таких уравнений, для которых направления характеристик в точках линии изменения типа не совпадают с направлением этой линии. При $m = 0$ и $m = 1$ уравнение (5) совпадает соответственно с уравнениями Лаврентьева-Бицадзе и Трикоми, а при нечетном m – с уравнением Геллерстедта.

При постановке граничных задач в смешанной области обычно требуют, чтобы на линии $y = 0$ изменения типа были непрерывны искомое решение $u(x, y)$ и его нормальная производная, то есть выполнялись условия

$$u(x, 0+0) - u(x, 0-0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0-0) = 0. \tag{6}$$

Рассматриваются также и более общие условия склеивания (линейные

[8] Крикунов Ю.М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. – 148 с.

условия сопряжения решений) вида

$$\begin{aligned} &\alpha_0(x)u(x,0+0)+\beta_0(x)u(x,0-0)=\gamma_0(x), \\ &\alpha_1(x)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0)+\beta_1(x)\frac{\partial u}{\partial y}(x,0-0)=\gamma_1(x). \end{aligned} \tag{7}$$

В диссертации исследованы задача о скачке (задача с неоднородными условиями вида (6)) и задачи с дефектами на линии изменения типа для уравнения (5) (задачи с разрывными коэффициентами в условиях вида (7)).

Будем говорить, что на линии изменения типа имеются дефекты, если на некоторых ее частях условия склеивания (6) заменены на условия другого вида. Например, если на дефекте задаются предельные значения искомого решения или его нормальной производной. Такая терминология заимствована из граничных задач теории упругости. Классическая задача Трикоми для уравнения эллиптико-гиперболического типа является задачей о скачке с нулевым скачком.

В §8 исследована задача о скачке искомого решения уравнения Лаврентьева-Бицадзе и его нормальной производной на линии изменения типа в стандартной смешанной области в следующей постановке. Пусть область D ограничена линией Γ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$ вещественной оси и характеристиками $AC: \ x+y=0$ и $BC: \ x-y=1$ уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Нужно найти регулярное или обобщенное решение уравнения в смешанной области D, которое принимает заданные значения на линии Γ и на характеристике AC, имеет предельные значения на AB всюду, кроме конечного числа исключительных точек и выполняются условия

$$u(x,0+0)-u(x,0-0)=a(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0-0)=b(x).$$

Задача о скачке сведена к сингулярному интегральному уравнению с логарифмической особенностью в ядре и затем к уравнению вида

$$\mu(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \mu(t)\Big[\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}\Big]\,dt=h(x),\quad 0<x<1,$$

решение которого получено в замкнутом виде. Метод интегральных уравнений для решения задачи Трикоми (задача T – частный случай задачи о скачке) был предложен впервые А.В.Бицадзе [9].

В §9 при решении задачи о скачке для уравнения Лаврентьева-Бицадзе применен метод интегрального преобразования Фурье. Общая схема рассуждений здесь точно такая, как при решении задачи о скачке для уравнения Гельмгольца. Получены решения вспомогательных задач Коши в эллиптической и гиперболической частях смешанной области. Задача о скачке на линии изменения типа сведена к краевой задаче Римана для аналитических функций с условием

$$N^+(\xi)\,(1+i\,\mathrm{sgn}\,\xi)+N^-(\xi)=-|\xi|\,[\Phi^-(\xi)+4\Psi^+(\xi)+A(\xi)]+i\,\mathrm{sgn}\,\xi\;B(\xi),$$

решение которой получено в явном виде.

В §10 с помощью интегральных представлений, дающих решение задачи о скачке, получены интегральные уравнения, эквивалентные задачам с дефектами на линии изменения типа. Подробно рассмотрен случай дефекта 1-го рода, когда в интервале (α,β) линии изменения типа задается искомое решение, а на остальной ее части – условия (6). Задача сведена к интегральному уравнению с логарифмической особенностью в ядре

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_\alpha^\beta b(\xi)\Big[\int\limits_0^\xi\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)dt\Big]\,d\xi$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^x b(\xi)\,d\xi=\chi(x),\ x\in(\alpha,\beta),$$

[9]Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа / Итоги науки. Физ.-мат. науки. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

найдено его явное решение.

В §11 методом интегральных уравнений решена задача о скачке для обобщенного уравнения Трикоми в стандартной смешанной области, предварительно рассмотрены вспомогательные задачи: задача N в эллиптической части смешанной области и задача Коши в гиперболической части. С помощью явного решения задачи о скачке получено сингулярное интегральное уравнение в задаче с дефектом 1-го рода на линии изменения типа

$$-\frac{1}{2}\,c(x)-\frac{\gamma}{\pi}\,\cot\frac{\pi}{4}(1-p)\,Z(x)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{c(t)}{Z(t)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)dt-$$

$$-\frac{\gamma}{\pi}\,\cot\frac{\pi}{4}(1-p)\,Z(x)\int\limits_{\beta}^{1}\frac{c(t)}{Z(t)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)dt=\chi(x),\quad x\in(\alpha,\beta).$$

Основные результаты диссертации

1. Найдены необходимые и достаточные условия существования решения переопределенной задачи Коши для уравнения Гельмгольца в полосе и в кольце.

2. Исследованы задачи о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскослоистой среде и в осесимметричной слоистой среде. Получены системы линейных алгебраических уравнений для образов Фурье или коэффициентов Фурье граничных функций.

3. Задачи дифракции электромагнитных волн на металлических лентах в слоистых средах сведены к интегральным уравнениям с логарифмической особенностью в ядрах.

4. Построены явные решения задачи о скачке на линии изменения типа для уравнений Лаврентьева-Бицадзе и обобщенного уравнения Трикоми методом интегральных уравнений и методом преобразования Фурье.

5. Исследованы задачи с дефектом на линии изменения типа для уравнений Лаврентьева-Бицадзе и обобщенного уравнения Трикоми в смешанной области.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Н.Б.Плещинскому за постановку задач и за помощь при выполнении диссертационной работы.

Публикации по теме диссертации

1. Махер А. Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в слоистых средах // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. Матер. Молодежн. науч. шк.-конф. - Казань: НИИММ им. Н.Г.Чеботарева, 2000. - С.203-211.

2. Махер А., Плещинский Н.Б. Задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскослоистой среде и ее приложения // Изв. вузов. Матем. (принято к печати)

3. Махер А., Плещинский Н.Б. Граничные задачи для уравнений смешанного типа с дефектом на линии изменения типа // Препринт. Казанское матем. об-во. – Казань, 2001.

4. Maher A., Pleshchinskii N.B. Plane electromagnetic wave scattering and diffraction in a stratified medium // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2000. Kharkov, Ukraine, Sept. 12-15, 2000. Vol.2. - P.426-428.

Отпечатано с готового оригинал макета
в ООО «ДАС»
Подписано в печать 23.09.01. Формат 60x90 1/16.
Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая.
Тираж 100 экз. Заказ 09/83
420008, Казань, ул. Университетская, 17
Тел. 64–69–26

2-00